מבחן ראשון

חלק א

בחלק ב יש 4 שאלות. בכל שאלה רק תשובה אחת נכונה. הקף בעיגול את התשובה הנכונה. הקף רק תשובה אחת, אחרת הניקוד באותה השאלה יהי 0. הציון יינתן רק על סמך הסימון, החישובים לא יבדקו.

שאלה 1 (6%) זאת שאלה משעורי הבית

יהי C עקום החיתוך של המשטחים $2x^2 - y^2 = 1, 2y - z = 0$. הנקודה $(1,1,2)$ נמצאת על העקום הזה. נסמן ב- $\hat{n}$ וקטור משיק לעקום C בנקודה הזאת, בכוון שיוצר זווית כהה עם כוון החיובי של הציר z. תהי $f(x,y,z) = ze^{x^2-y^2} - z$. אזי הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $(1,1,2)$ בכוון הוקטור $\hat{n}$ שווה ל-:

א. $\frac{2}{3}$; ב. $\frac{6}{\sqrt{41}}$; ג. $\frac{9}{\sqrt{65}}$; ד. 2; ה. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. תשובה נכונה: ה.

שאלה 2 (6%)

העבודה הנעשית ע"י הכוח $\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j} + \frac{3}{8\pi^2}z^2\hat{k}$ לאורך העקום $C: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t$ מהנקודה $A(2,0,0)$ לנקודה $B(2,0,6\pi)$ שווה ל-:

א. 3π; ב. π; ג. 2π; ד. 29π; ה. -25π. תשובה נכונה: ד.

שאלה 3 (6%)

האינטגרל המשטחי $\iint_S (x^2 - y^2 + z)\,dS$ כאשר S הוא חלק המשטח הגלילי $x^2 + y^2 = 9$ החסום ע"י המישורים $x = 0, z = 0, z = 2, y = 0$ וגם $x \ge 0, y \ge 0$ שווה ל-:

א. 3π; ב. $\frac{27\pi}{4}$; ג. π; ד. 12π; ה. $\frac{3\pi}{4}$. תשובה נכונה: א.

שאלה 4 (6%)

תהי $f(t)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים על כל הישר ויהי השדה הוקטורי $\vec{F} = \left[f(x+y^2) + xf'(x+y^2)\right]\hat{i} + \left[2xyf'(x+y^2) + 2x\right]\hat{j}$. יהי התחום $D = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1, |x+y| \le 1\}$. יהי L השפה של D (L הוא משושה, מכוון נגד כוון השעון). נסמן $I = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$. אזי I שווה ל-:

א. 3; ב. 6; ג. 9; ד. 12; ה. 0; ו. 2π.

רמז: מומלץ לצייר את השפה של התחום D. תשובה נכונה: ב.

חלק א

בחלק ב יש 4 שאלות. בכל שאלה רק תשובה אחת נכונה. הקף בעיגול את התשובה הנכונה. הקף רק תשובה אחת, אחרת הניקוד באותה השאלה יהי 0. הציון יינתן רק על סמך הסימון, החישובים לא יבדקו.

שאלה 1 (6%) זאת שאלה משעורי הבית

יהי C עקום החיתוך של המשטחים $2x^2-y^2=1, 3y-z=0$. הנקודה $(1,1,3)$ נמצאת על העקום הזה. נסמן ב- $\hat{n}$ וקטור משיק לעקום C בנקודה הזאת, בכוון שיוצר זווית כהה עם כוון החיובי של הציר z. תהי $f(x,y,z)=ze^{x^2-y^2}-z$. אזי הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $(1,1,3)$ בכוון הוקטור $\hat{n}$ שווה ל-:

א. $\frac{2}{3}$; ב. $\frac{6}{\sqrt{41}}$; ג. $\frac{9}{\sqrt{65}}$; ד. 2; ה. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. תשובה נכונה: ב.

שאלה 2 (6%)

העבודה הנעשית ע"י הכוח $\vec{F}=-\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}+\frac{3}{8\pi^2}z^2\hat{k}$ לאורך העקום $C: x=2\cos t, y=2\sin t, z=t$ מהנקודה $A(2,0,0)$ לנקודה $B(2,0,2\pi)$ שווה ל-:

א. 3π; ב. π; ג. 2π; ד. 29π; ה. -25π. תשובה נכונה: א.

שאלה 3 (6%)

האינטגרל המשטחי $\iint_S (x^2-y^2+z)\,dS$ כאשר S הוא חלק המשטח הגלילי $x^2+y^2=9$ החסום ע"י המישורים $x=0, z=0, z=1, y=0$ וגם $x\ge 0, y\ge 0$ שווה ל-:

א. 3π; ב. $\frac{27\pi}{4}$; ג. π; ד. 12π; ה. $\frac{3\pi}{4}$. תשובה נכונה: ה.

שאלה 4 (6%)

תהי $f(t)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים על כל הישר ויהי השדה הוקטורי $\vec{F}=\left[f(x+y^2)+xf'(x+y^2)\right]\hat{i}+\left[2xyf'(x+y^2)+3x\right]\hat{j}$. יהי התחום $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le 1, |y|\le 1, |x+y|\le 1\}$. יהי L השפה של D (L הוא משושה, מכוון נגד כוון השעון).

נסמן $I=\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$. אזי I שווה ל-:

א. 3; ב. 6; ג. 9; ד. 12; ה. 0; ו. 2π. תשובה נכונה: ג.

רמז: מומלץ לצייר את השפה של התחום D.

חלק א

בחלק ב יש 4 שאלות. בכל שאלה רק תשובה אחת נכונה. הקף בעיגול את התשובה הנכונה. הקף רק תשובה אחת, אחרת הניקוד באותה השאלה יהי 0. הציון יינתן רק על סמך הסימון, החישובים לא יבדקו.

שאלה 1 (6%) זאת שאלה משעורי הבית

יהי C עקום החיתוך של המשטחים $2x^2-y^2=1, y-z=0$. הנקודה $(1,1,1)$ נמצאת על העקום הזה. נסמן ב- $\hat{n}$ וקטור משיק לעקום C בנקודה הזאת, בכוון שיוצר זווית כהה עם כוון החיובי של הציר z. תהי $f(x,y,z)=ze^{x^2-y^2}-z$. אזי הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $(1,1,1)$ בכוון הוקטור $\hat{n}$ שווה ל-: א. $\frac{2}{3}$; ב. $\frac{6}{\sqrt{41}}$; ג. $\frac{9}{\sqrt{65}}$; ד. 2; ה. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. תשובה נכונה: א.

שאלה 2 (6%)

העבודה הנעשית ע"י הכוח $\vec{F}=-\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}+\frac{3}{8\pi^2}z^2\hat{k}$ לאורך העקום $C: x=2\cos t, y=2\sin t, z=-t$ מהנקודה $A(2,0,0)$ לנקודה $B(2,0,-2\pi)$ שווה ל-:

א. 3π; ב. π; ג. 2π; ד. 29π; ה. -25π. תשובה נכונה: ב.

שאלה 3 (6%)

האינטגרל המשטחי $\iint_S (x^2-y^2+z)\,dS$ כאשר S הוא חלק המשטח הגלילי $x^2+y^2=9$ החסום ע"י המישורים $x=0, z=0, z=4, y=0$ וגם $x\ge 0, y\ge 0$ שווה ל-:

א. 3π; ב. $\frac{27\pi}{4}$; ג. π; ד. 12π; ה. $\frac{3\pi}{4}$. תשובה נכונה: ד.

שאלה 4 (6%)

תהי $f(t)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים על כל הישר ויהי השדה הוקטורי $\vec{F}=\left[f(x+y^2)+xf'(x+y^2)\right]\hat{i}+\left[2xyf'(x+y^2)+x\right]\hat{j}$. יהי התחום $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le 1, |y|\le 1, |x+y|\le 1\}$. יהי L השפה של D (L הוא משושה, מכוון נגד כוון השעון). נסמן $I=\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$. אזי I שווה ל-:

א. 3; ב. 6; ג. 9; ד. 12; ה. 0; ו. 2π. תשובה נכונה: א.

רמז: מומלץ לצייר את השפה של התחום D.

חלק ב

בחלק הזה 2 שאלות פתוחות. יש לתת תשובות מלאות ומנומקות. רשום את הפתרון רק על השאלון, הטיוטות לא יבדקו.

שאלה 1 (8%)

תהי $\varphi(t)$ פונקציה מוגדרת לכל t ממשי וכך $\varphi'(0)=3$. נגדיר את הפונקציה החדשה $f(x,y)=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. בדוק ש- $f'_x(0,0)$ אינה קיימת.

פתרון

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi\left(\sqrt{(\Delta x)^2}\right)-\varphi(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(|\Delta x|)-\varphi(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(|\Delta x|)-\varphi(0)}{|\Delta x|}\cdot\frac{\Delta x}{|\Delta x|}$$

לכן $f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(|\Delta x|)-\varphi(0)}{|\Delta x|}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|}=\varphi'(0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|}$ ומכוון ש- $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{|\Delta x|}$ אינו קיים (הגבולות הצדדיים שונים) נובע ש- $f'_x(0,0)$ אינו קיים. **יש לציין שאסור להשתמש בכלל השרשרת בנקודה $(0,0)$ מכוון שהפונקציה $\sqrt{x^2+y^2}$ אינה בעלת נגזרות חלקיות באותה נקודה.**

שאלה 2 (10%)

תהי $F(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה $(1,2)$ וכך ש- $F(1,2)=0$. נתון ש- $F'_x(1,2)=3, F'_y(1,2)=0$. הוכח שהמשוואה $F(x,y)=0$ אינה מגדירה פונקציה סתומה גזירה $y=\varphi(x)$ בסביבת $x_0=1$ כך ש- $\varphi(1)=2$.

שים לב! משפט הפונקציות הסתומות נותן תנאים מספיקים לקיום הפונקציה, אבל אינו נותן תנאים הכרחיים!

פתרון

נניח שקיימת פונקציה $\varphi(x)$ כנ"ל. זאת אומרת ש- $F(x,\varphi(x))=0$ בסביבת $x_0=1$. אפשר לגזור לפי כלל השרשרת (מותר, מכוון ששתי הפונקציות דיפרנציאביליות) ומקבלים באותה סביבה $F'_x(x,\varphi(x))\cdot 1+F'_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0$. כאשר מציבים $x=1$ ו- $\varphi(1)=2$ מקבלים $F'_x(1,2)+F'_y(1,2)\cdot\varphi'(1)=0$. אם בשוויון האחרון מציבים $F'_x(1,2)=3, F'_y(1,2)=0$ מקבלים $3=0$ סתירה! ולכן הפונקציה $\varphi(x)$ אינה קיימת (זאת ההנחה שגרמה לסתירה).

מבחן שני

חלק א

בחלק ב יש 3 שאלות. בכל שאלה רק תשובה אחת נכונה. הקף בעיגול את התשובה הנכונה. הקף רק תשובה אחת, אחרת הניקוד באותה השאלה יהי 0. הציון יינתן רק על סמך הסימון, החישובים לא יבדקו.

שאלה 1 (6%)

נתונים שני הישרים

$$L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{3}, \qquad L_2: \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$$

ידוע כי המישור Q מקביל לשני הישרים האלה ונמצא באותו מרחק d מהם. אזי המרחק d שווה ל-:

א. $\frac{7}{6}$; ב. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ג. $\frac{2}{3}$; ד. $\frac{6}{7}$; ה. $\frac{1}{3}$. תשובה נכונה: א.

שאלה 2 (6%)

תהי נתונה נוסחת טיילור עד סדר 2 של הפונקציה (בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 3 כולל בכל המישור) $f(x,y)=4-\frac{x^2}{2}+xy-y^2+R_2$ כאשר R_2 השארית. אזי הנקודה $(0,0)$:

א. הינה נקודת מינימום מקומי; ב. הינה נקודת מקסימום מקומי; ג. הינה נקודת אוכף; ד. אינה נקודה קריטית; ה. הינה נקודת מינימום מוחלט בכל המישור. תשובה נכונה:ב.

שאלה 3 (6%)

יהי C עקום החיתוך של המשטח הגלילי $x^2+y^2=x$ וחצי הכדור העליון $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ויהי $I=\oint_C ydx-xdy+zdz$. אזי $|I|$ שווה ל-:

א. 8π; ב. $\frac{9\pi}{2}$; ג. $\frac{\pi}{2}$; ד. 18π; ה. 3π. תשובה נכונה: ג

חלק א

בחלק ב יש 3 שאלות. בכל שאלה רק תשובה אחת נכונה. הקף בעיגול את התשובה הנכונה. הקף רק תשובה אחת, אחרת הניקוד באותה השאלה יהי 0. הציון יינתן רק על סמך הסימון, החישובים לא יבדקו.

שאלה 1 (6%)

נתונים שני הישרים

$$L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{3}, \qquad L_2: \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$$

ידוע כי המישור Q מקביל לשני הישרים האלה ונמצא באותו מרחק d מהם. אזי המרחק d שווה ל-:

א. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ב. $\frac{7}{6}$; ג. $\frac{2}{3}$; ד. $\frac{6}{7}$; ה. $\frac{1}{3}$. תשובה נכונה: ב.

שאלה 2 (6%)

תהי נתונה נוסחת טיילור עד סדר 2 של הפונקציה (בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 3 כולל בכל המישור) $f(x,y)=4-\frac{x^2}{2}+xy-y^2+R_2$ כאשר R_2 השארית. אזי הנקודה $(0,0)$:

א. הינה נקודת מינימום מקומי; ב. אינה נקודה קריטית; ג. הינה נקודת אוכף; ד. הינה נקודת מקסימום מקומי; ה. הינה נקודת מינימום מוחלט בכל המישור. תשובה נכונה: ד.

שאלה 3 (6%)

יהי C עקום החיתוך של המשטח הגלילי $x^2+y^2=6x$ וחצי הכדור העליון $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$ ויהי $I=\oint_C ydx-xdy+zdz$. אזי $|I|$ שווה ל-:

א. 8π; ב. $\frac{9\pi}{2}$; ג. $\frac{\pi}{2}$; ד. 18π; ה. 3π. תשובה נכונה: ד.

חלק א

בחלק ב יש 3 שאלות. בכל שאלה רק תשובה אחת נכונה. הקף בעיגול את התשובה הנכונה. הקף רק תשובה אחת, אחרת הניקוד באותה השאלה יהי 0. הציון יינתן רק על סמך הסימון, החישובים לא יבדקו.

שאלה 1 (6%)

נתונים שני הישרים

$$L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{3}, \qquad L_2: \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$$

ידוע כי המישור Q מקביל לשני הישרים האלה ונמצא באותו מרחק d מהם. אזי המרחק d שווה ל-:

א. $\frac{2}{3}$; ב. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ג. $\frac{7}{6}$; ד. $\frac{6}{7}$; ה. $\frac{1}{3}$. תשובה נכונה: ג.

שאלה 2 (6%)

תהי נתונה נוסחת טיילור עד סדר 2 של הפונקציה (בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 3 כולל בכל המישור) $f(x,y)=4-\frac{x^2}{2}+xy-y^2+R_2$ כאשר R_2 השארית. אזי הנקודה $(0,0)$:

א. הינה נקודת מינימום מקומי; ב. הינה נקודת מינימום מוחלט בכל המישור; ג. הינה נקודת אוכף; ד. אינה נקודה קריטית; ה. הינה נקודת מקסימום מקומי. תשובה נכונה: ה.

שאלה 3 (6%)

יהי C עקום החיתוך של המשטח הגלילי $x^2+y^2=3x$ וחצי הכדור העליון $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ ויהי $I=\oint_C ydx-xdy+zdz$. אזי $|I|$ שווה ל-:

א. 8π; ב. $\frac{9\pi}{2}$; ג. $\frac{\pi}{2}$; ד. 18π; ה. 3π. תשובה נכונה: ב.

חלק ב

בחלק הזה 2 שאלות פתוחות. יש לתת תשובות מלאות ומנומקות. רשום את הפתרון רק על השאלון, הטיוטות לא יבדקו.

שאלה 1 (10%) זאת שאלה משעורי הבית

תהי $f(x,y)$ מוגדרת לכל $(x,y)\neq(0,0)$ ומקיימת $f(tx,ty)=f(x,y)$ לכל $t>0$. הוכח שאם הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ קיים אזי $f(x,y)$ קבועה.

פתרון

נתבונן במסלול $(t,t), t>0$. מכוון שהמסלול הזה רציף ושואף ל- $(0,0)$ כאשר $t\to0$ והגבול הכפול קיים ואינו תלוי במסלול, נובע ש- $\lim\limits_{t\to0} f(t,t)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$. אבל $f(t,t)=f(t\cdot1,t\cdot1)=f(1,1)$

ולכן $f(1,1)=\lim\limits_{t\to0} f(t,t)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$.

נתבונן עכשיו במסלול $(at,bt), t>0$. מכוון שהמסלול הזה רציף ושואף ל- $(0,0)$ כאשר $t\to0$ והגבול הכפול קיים ואינו תלוי במסלול, נובע ש- $\lim\limits_{t\to0} f(at,bt)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$. גם עכשיו

$f(at,bt)=f(a,b)$ ולכן $f(a,b)=\lim\limits_{t\to0} f(at,bt)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(1,1)$. בצורה הזאת הוכחנו

שלכל נקודה (a,b) נובע ש- $f(a,b)=f(1,1)$ ולכן $f(x,y)$ היא קבועה ו- $f(x,y)=f(1,1)$ לכל נקודה (x,y).

שאלה 2

יהיו השדה הוקטורי במרחב $\vec{F}=\dfrac{x\hat{i}+y\hat{j}-z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ והמשטח (הפתוח)

$S=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2-z^2=0,\ 1\le z\le 4\right\}$ נתונים.

א. (15%) חשב לפי ההגדרה (ישירות) את $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS$ כאשר הנורמל יוצר זווית כהה עם הוקטור $\hat{k}$.

ב. (5%) חשב את $div\vec{F}$ כאשר $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

ג. (10%) חשב את האינטגרל המשולש $\iiint\limits_V \dfrac{2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$ כאשר V הגוף החסום ע"י $z=\sqrt{x^2+y^2}$ והמישורים $z=1$ ו- $z=4$.

פתרון

מכוון ש- $z\ge0$ מהמשוואה $x^2+y^2-z^2=0$ מקבלים $z=\sqrt{x^2+y^2}$ כך שהמשטח S נתון בצורה וקטורית ע"י $\vec{r}(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)$, כאשר $1\le z^2\le16$ ואז הנקודה (x,y) שייכת לתחום

$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 16\right\}$. מכוון ש-

$\vec{r}_x'(x,y)=\left(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\vec{r}_y'(x,y)=\left(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ נובע ש- $\left(\vec{r}_x'\times\vec{r}_y'\right)\cdot\hat{k}=1>0$ ואז הנורמל

המתאים הוא $\vec{r}_y'\times\vec{r}_x'$. עכשיו $\vec{F}\cdot\hat{n}dS=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ו-

$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS=\iint\limits_D \sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\left(16\pi-\pi\right)=15\pi\sqrt{2}$ כאשר האינטגרל הכפול שווה לשטח הטבעת D.

עבור חלק ב, נחשב את הנגזרת

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\frac{y^2+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$$

באופן דומה מקבלים

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{x^2+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$$

ולכן

$$div\vec{F}=\frac{y^2+z^2+x^2+z^2-x^2-y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\frac{2z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}.$$

עבור חלק ג, אפשר להשתמש במשפט גאוס. השדה $\vec{F}$ בעל נגזרות רציפות ב- V (נקודת אי הרציפות היחידה $(0,0,0)$ אינה שייכת ל- V). השפה של הגוף מורכבת מהמשטח S הנ"ל, מהמשטח $S_1:z=1,x^2+y^2\le 1$ ומהמשטח $S_2:z=4,x^2+y^2\le 16$. לפי משפט גאוס מקבלים (אחרי שמשתמשים בחלק ב של השאלה):

$$\iiint\limits_V \frac{2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=\iiint\limits_V div\vec{F}dxdydz=$$

$$=\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS+\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}_1dS_1+\iint\limits_{S_2}\vec{F}\cdot\hat{n}_2dS_2$$

האינטגרל $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dS$ מכוון כמו בחלק א והוא שווה ל- $15\pi\sqrt{2}$. הנורמל למשטח S_1 הוא $-\hat{k}$ ולכן על המשטח הזה $\vec{F}\cdot\hat{n}=\vec{F}\cdot\left(-\hat{k}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$. עכשיו

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}_1dS_1=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}dr=$$
$$=2\pi\sqrt{r^2+1}\Big|_0^1=\pi\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

הנורמל למשטח S_2 הוא $\hat{k}$ ולכן על המשטח הזה $\vec{F}\cdot\hat{n}_2=\vec{F}\cdot\hat{k}=-\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+16}}$. עכשיו

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\hat{n}_2dS_2=-\iint_{x^2+y^2\le 16}\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+16}}dxdy=-4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\frac{r}{\sqrt{r^2+16}}dr=$$
$$=-8\pi\sqrt{r^2+16}\Big|_0^4=\pi\left(-32\sqrt{2}+32\right)$$

סוף-סוף מקבלים

$$\iiint_V\frac{2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=\pi\left(15\sqrt{2}-32\sqrt{2}+32-2+2\sqrt{2}\right)=\pi\left(30-15\sqrt{2}\right).$$

<u>שיטה 2 עבור חלק ג</u>

נסמן $I=\iiint_V\frac{2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$ עכשיו נחשב את I.

$I=\int_1^4 dz\iint_{x^2+y^2\le z^2}\frac{2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\int_1^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{2z^2r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dr$. אבל

$\left[\left(r^2+z^2\right)^{-1/2}\right]'_r=-r\left(r^2+z^2\right)^{-3/2}$ ולכן

$\int_0^z\frac{2z^2r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dr=-2z^2\left(r^2+z^2\right)^{-1/2}\Big|_0^z=-2z^2\left(\frac{1}{z\sqrt{2}}-\frac{1}{z}\right)=2z\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. עכשיו

$I=\int_1^4 2z\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dz\int_0^{2\pi}d\theta$. באופן סופי מקבלים

$$\iiint_V\frac{2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=\pi\left(2-\sqrt{2}\right)(16-1)=\pi\left(30-15\sqrt{2}\right).$$